第32卷 第9期
2010年5月

武汉理工大学学报
JOURNAL OF WUHAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Vol. 32 No. 9
May. 2010

DOI: 10.3963/j.issn.1671-4431.2010.09.007

非比例阻尼结构体系的快速随机分析

国 巍，李宏男
(大连理工大学建设工程学部海岸与近海工程国家重点实验室，大连 116024)

摘 要：作者基于结构动力学、虚拟激励法和拟力法的基本思想推导了一种适用于非比例阻尼结构体系的新型快速随机分析方法。在所提出的新方法中，非比例阻尼结构的动力平衡方程以迭代的形式列出，基于此迭代方式，避免了大型矩阵的求逆运算。此外，与前人研究工作不同，新方法不需要求解结构体系的复数特征值，避免了复数运算。同时，作者指出了迭代方法收敛的充分条件，并研究了如何优化迭代矩阵来实现迭代过程的快速收敛。最后，作者进一步分析该方法的计算效率。

关键词：非比例阻尼；随机分析；虚拟激励法；拟力法；收敛条件
中图分类号：TU 311.4 文献标识码：A 文章编号：1671-4431(2010)09-0031-04

Fast Stochastic Analysis for Non-proportionally Damped Structure

GUO Wei, LI Hong-nan
(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Fundamental principles from structural dynamics, pseudo excitation method and pseudo force method are used to develop a new fast stochastic method for seismic analysis of the non-proportionally damped structure. In the new method, the dynamic equilibrium equation of non-proportionally damped structure is expressed in the iteration form, based on which the inverse operation of the matrices is avoided. Moreover, the new method also does not need the solution of any complex eigenvalue problem, in contrast to other methods found in the literature. Sufficient condition for the convergence of the iterative method has been provided, and the approach to optimize the iterative matrices for rapid convergence is researched. Finally, the computation efficiency of the method is examined.

Key words: non-proportional damping; stochastic analysis; pseudo excitation method; pseudo force method; convergence condition

对于非比例阻尼结构体系而言，利用无阻尼结构的实模态矩阵往往无法将动力平衡方程进行解耦运算，传统的处理方法往往是采用状态向量法[1]，计算非比例阻尼结构体系的复数特征值和特征向量，从而进行复模态分析。然而，复数问题往往意味着复杂运算和较大的计算量，为了克服此缺陷，许多学者提出了各具特色的求解特征值方法[2-5]，以改进计算效率。同时，另外一部分学者试图通过其他手段[6-9]来避免复数特征值的求解。前人研究表明，相对于其他方法而言，迭代法在计算效率和准确性上具有一定的优势。通常认为：对于非比例阻尼结构体系而言，不论是在时程运算还是随机分析中，迭代法均具有较好的适用性。自上

收稿日期：2010-01-24.
基金项目：教育部创新团队资助项目(IRT0518)和高等学校学科创新引智计划(B08014).
作者简介：国 巍(1982-)，男，博士. E-mail: wei.guo.86@gmail.com

世纪 90 年代以来许多学者在此方面进行了较为系统的研究[10-13]，在前人工作的基础上,作者提出了一种适用于非比例阻尼结构体系的新型快速随机分析方法,该方法优于前人所提出的方法。首先,该方法是基于虚拟激励法的推导,其具备虚拟激励法在随机分析中的高效率特征[14]；其次,结合拟力法的优势,避免了随机分析中的矩阵求逆运算;同时,基于该方法的随机运算避免了复数特征值和特征向量的求解,具有工程实用价值。最后,文中通过重构迭代矩阵的措施来提高收敛速度,并从数学角度分析了该方法的计算效率。

1 构造迭代公式

非比例阻尼结构体系的运动方程可以写为如下形式

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{U}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}=-\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}\ddot{u}_g(t) \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别为非比例阻尼结构体系的质量、阻尼和刚度矩阵。$\boldsymbol{U}=[u_1, u_2, \cdots, u_n]^{\mathrm{T}}$ 为结构体系相对于地面的位移向量。$\boldsymbol{U}$ 的上标黑点代表了对时间的导数。$\boldsymbol{E}$ 为影响因子向量,表示当基础发生单位位移时结构体系的刚体位移。令 $\Phi=[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n]$ 表示无阻尼结构体系的模态矩阵

$$\Phi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\Phi\Omega=\Phi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\Phi \tag{2}$$

其中,上标 T 表示矩阵的转置操作,矩阵 Ω 为包含结构体系特征值的对角矩阵。对于大型结构而言,可定义其前几阶模态为

$$\Phi_a=[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n_a}],\ n_a<<n \tag{3}$$

其中,$n_a<<n$ 为截取模态的数目。为了对式(1)进行解耦,可以采用下面的转换

$$\boldsymbol{U}=\Phi_a\boldsymbol{q} \tag{4}$$

其中,$\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{R}^{n_a\times 1}$为正则坐标向量。我们可以将微分方程式在模态子空间中重新写为如下形式

$$\ddot{\boldsymbol{q}}+\overline{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{q}}+\overline{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{q}=-\Gamma\ddot{u}_g(t) \tag{5}$$

其中,$\Gamma=\Phi_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}$ 为模态参与因子向量。$\overline{\boldsymbol{C}}\in\boldsymbol{R}^{n_a\times n_a}$和$\overline{\boldsymbol{K}}\in\boldsymbol{R}^{n_a\times n_a}$为变换后的阻尼和刚度矩阵。

式(5)中的矩阵 $\overline{\boldsymbol{C}}$ 可以分解为如下形式

$$\overline{\boldsymbol{C}}=\overline{\boldsymbol{C}}_d+\overline{\boldsymbol{C}}_f \tag{6}$$

其中,矩阵 $\overline{\boldsymbol{C}}_d$ 为由矩阵$\overline{\boldsymbol{C}}$ 的主对角元素构成的对角矩阵。矩阵 $\overline{\boldsymbol{C}}_f$ 为由矩阵 $\overline{\boldsymbol{C}}$ 的非对角元素构成的矩阵。为了实现更快的迭代收敛,同时使得推导过程更一般化,可通过引入一个迭代系数来优化迭代收敛过程,将对角矩阵 $\overline{\boldsymbol{C}}_d$ 分解为如下 2 部分

$$\overline{\boldsymbol{C}}_d=\alpha\overline{\boldsymbol{C}}_d+(1-\alpha)\overline{\boldsymbol{C}}_f \tag{7}$$

其中,系数 α 可根据式(25)得到,其合理取值可以加快迭代速度,下文中将对其如何取值进行详述。因此,矩阵 $\overline{\boldsymbol{C}}$ 可以划分为

$$\overline{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\alpha\overline{\boldsymbol{C}}_d+(1-\alpha)\overline{\boldsymbol{C}}_d+\overline{\boldsymbol{C}}_f \tag{8}$$

其中,矩阵 $\boldsymbol{A}=\alpha\overline{\boldsymbol{C}}_d$ 为构造的优化对角矩阵。$\boldsymbol{B}=(1-\alpha)\overline{\boldsymbol{C}}_d+\overline{\boldsymbol{C}}_f$ 包含了减去对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 之后剩余的对角矩阵$(1-\alpha)\overline{\boldsymbol{C}}_d$ 和矩阵$\overline{\boldsymbol{C}}$ 的非对角部分 $\overline{\boldsymbol{C}}_f$。将式(8)带入式(5),并将 $\boldsymbol{B}=(1-\alpha)\overline{\boldsymbol{C}}_d+\overline{\boldsymbol{C}}_f$ 移至方程的右边,可得

$$\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{q}}+\overline{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{q}=-\Gamma\ddot{u}_g(t)-\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{9}$$

在非比例阻尼结构体系的随机分析中,假定输入的地震动为 0 均值高斯过程,功率谱密度函数标记为 $S_{\ddot{u}_g}$。鉴于传统的随机振动分析方法较低的计算效率,该文引入虚拟激励法,地面运动可假定为虚拟的弦波输入

$$\ddot{u}_g(t)=\sqrt{S_{\ddot{u}_g}}\mathrm{e}^{r\omega t},\ r=\sqrt{-1} \tag{10}$$

定义:

$$\boldsymbol{H}_d=(-\boldsymbol{I}\omega^2+r\omega\boldsymbol{A}+\overline{\boldsymbol{K}})^{-1} \tag{11}$$

其中,$\boldsymbol{I}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$为常数向量。根据式(9)和式(10),虚拟响应的迭代解可以从下式给出

$$\boldsymbol{q}^{(k)}=\boldsymbol{q}_{\omega}^{(k)}\sqrt{S_{\ddot{u}_g}}\mathrm{e}^{r\omega t} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{q}_{\omega}^{(k)} = -\boldsymbol{H}_d(\Gamma + r\omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_{\omega}^{(k-1)}) \tag{13}$$

其中, 初始虚拟响应可定为 $\boldsymbol{q}^{(0)}=0$ 和 $\boldsymbol{q}_{\omega}^{(0)}=0$。根据式(12)和式(13)的迭代过程可以得到虚拟响应的收敛解。进而, 结构体系的位移功率谱密度函数可以通过下式得到

$$\boldsymbol{S}_U = \boldsymbol{U}^* \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

其中, 上标 *表示复数共轭。$\boldsymbol{U}$ 可以通过将式(12)和式(13)的虚拟响应收敛解代入式(4)得到。

2　收敛条件以及迭代矩阵优化

令 $\boldsymbol{q}^e$, $\boldsymbol{q}_{\omega}^e$ 表示在虚拟激励 $\ddot{u}_g(t) = \sqrt{S_{\ddot{u}_g}}\mathrm{e}^{r\omega t}$ 下式(5)中虚拟响应的精确值, $\boldsymbol{q}^{(k)}$, $\boldsymbol{q}_{\omega}^{(k)}$ 为迭代过程求得虚拟响应的 k 阶迭代近似解。另外, 式(12)和式(13)可以重新写为如下形式

$$\boldsymbol{q}^e = \boldsymbol{q}_{\omega}^e \sqrt{S_{\ddot{u}_g}}\mathrm{e}^{r\omega t} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{q}_{\omega}^e = -\boldsymbol{H}_d(\Gamma + r\omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_{\omega}^e) \tag{16}$$

将式(15)和式(16)分别减去式(12)和式(13), 并且定义 $\delta^{(k)} = \boldsymbol{q}^e - \boldsymbol{q}^{(k)}$, $\delta_{\omega}^{(k)} = \boldsymbol{q}_{\omega}^e - \boldsymbol{q}_{\omega}^{(k)}$ 可以得到

$$\delta^{(k)} = \delta_{\omega}^{(k)} \sqrt{S_{\ddot{u}_g}}\mathrm{e}^{r\omega t} \tag{17}$$

$$\delta_{\omega}^{(k)} = -r\omega\boldsymbol{H}_d\boldsymbol{B}\delta_{\omega}^{(k-1)} \tag{18}$$

可以得到递归表示

$$\delta_{\omega}^{(k)} = [\boldsymbol{G}(\omega)]^k \delta_{\omega}^{(0)} \tag{19}$$

其中:

$$\boldsymbol{G}(\omega) = [\omega(\omega\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{B}] \tag{20}$$

$$\omega\boldsymbol{W} = \omega\boldsymbol{M} + r\omega\boldsymbol{N} \tag{21}$$

$\boldsymbol{W}$ 为对角矩阵, 并有

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{C}_d \tag{22}$$

$$\omega\boldsymbol{N} = \boldsymbol{I}\omega^2 - \boldsymbol{K} \tag{23}$$

易知: 如果当 $[\boldsymbol{G}(\omega)]^k \to 0$ 时, $\delta_{\omega}^{(k)} \to 0$, 则迭代方程(13)收敛。此条件等价于矩阵 $\boldsymbol{G}(\omega)$ 的谱参数 $\rho_G(\omega)$ 在所有的频率点处均小于 1。由于谱参数 $\rho_G(\omega)$, $\omega \in \boldsymbol{R}$ 在计算上十分困难, 特别是对于大型矩阵而言, 因此许多学者提出了保证迭代式(13)收敛的充分条件, 其中一个可以描述为如下形式

$$\rho_G(\omega) = \rho_{W^{-1}B}(\omega) \leqslant \rho_{A^{-1}B} \tag{24}$$

基于上述条件, 通过令相应谱参数 $\rho_{A^{-1}B}$ 的边界为一个最小值得到系数 α 的最优值, 可参考文献[10]

$$\alpha_{\mathrm{opt}} = \frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{C}_d^{-1}\boldsymbol{C}) + \lambda_{\min}(\boldsymbol{C}_d^{-1}\boldsymbol{C})}{2} \tag{25}$$

其中, $\lambda_{\max}(\boldsymbol{C}_d^{-1}\boldsymbol{C})$ 和 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{C}_d^{-1}\boldsymbol{C})$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{C}_d^{-1}\boldsymbol{C}$ 的最大和最小特征值。作为评估迭代序列的收敛速度, 定义如下的参数

$$\mathrm{Err}_k(i) = \underset{\omega\in R}{\mathrm{RMS}}(\boldsymbol{q}_{\omega}^e(i) - \boldsymbol{q}_{\omega}^{(k)}(i)) / \underset{\omega\in R}{\mathrm{RMS}}(\boldsymbol{q}_{\omega}^e(i)) \tag{26}$$

$$v_k = (\|\mathrm{Err}_k\| / \|\mathrm{Err}_0\|)^{1/k} \tag{27}$$

其中, $\mathrm{Err}_k(i)$ 为第 k 次摄动第 i 个正则坐标的迭代误差的规一化均方根, v_k 为误差的平均减小因子, $\|\mathrm{Err}_k\|$ 为第 k 次代的误差向量的 Euclidean 值, $\|\mathrm{Err}_0\|$ 初始误差向量的 Euclidean 值。

同样, 可以定义

$$CR_k = -\frac{1}{k}\log(\|\mathrm{Err}_k\| / \|\mathrm{Err}_0\|) \tag{28}$$

作为第 k 次迭代的收敛平均速率。

3　计算效率分析

在大型结构体系中, 截取模态的数目 n_a 远远小于结构的自由度数目 n, 所以与数量 n_a 相关的计算量足够小可以忽略。同时, 与频率无关的计算量在随机分析中同样可以忽略。表 1 列出了该文所提方法主要的计算流程, 并详细对比分析了新方法和一般常规方法的计算效率, 其中 N_{ite} 和 N_{fre} 分别表示迭代次数和功率

谱密度函数的频率点数目。如表 1 所示,新方法的计算效率大致为 $n^2 N_{\mathrm{fre}}$ 的量级,这与林家浩等[15] 所提方法的计算效率基本相同。尽管如此,从表 1 中可以看到,新方法的优势在于非对角矩阵的逆运算可以避免,这就可以避免某些情况下由于矩阵病态所导致的数值问题。

表 1 文中所提随机分析方法、常规分析方法的计算流程和计算效率

步骤	文中所提随机分析方法		常规分析方法[15]	
	计算项	计算量	计算项	计算量
1	$\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{C}_d,\ \boldsymbol{B}=(1-\alpha)\boldsymbol{C}_d+\boldsymbol{C}_f$	n_q	for $1:N_{\mathrm{fre}}$	
2	for $1:N_{\mathrm{fre}}$		$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{Q}=-\omega\boldsymbol{C}$	n_q
3	$\boldsymbol{H}_d=(-\boldsymbol{I}\omega^2+r\omega\boldsymbol{A}+\boldsymbol{K})^{-1}$	n_q	$\boldsymbol{F}_{\mathrm{real}}=-\Gamma\sqrt{S_{\ddot{u}_g}}$	n_q
4	for $1:N_{\mathrm{ite}}$		$\boldsymbol{q}_{\mathrm{real}}=(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{F}_{\mathrm{real}}$	n_q^3
5	$\boldsymbol{q}_\omega^{(k)}=-\boldsymbol{H}_d(\Gamma+r\omega\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}_\omega^{(k-1)})$	n_q^2	$\boldsymbol{q}_{\mathrm{imag}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{q}_{\mathrm{real}}$	n_q^2
6	end		$\boldsymbol{q}_\omega=\boldsymbol{q}_{\mathrm{real}}+r\boldsymbol{q}_{\mathrm{imag}}$	nn_q
7	$\boldsymbol{U}=\Phi_q\boldsymbol{q}_\omega$	nn_q	$\boldsymbol{U}=\Phi_q\boldsymbol{q}_\omega$	n_q
8	$\boldsymbol{S}_U=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$	n^2	$\boldsymbol{S}_U=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$	n^2
9	end		end	
总计算量		n^2N_{freq}		n^2N_{freq}

4 结 论

作者提出了一种适用于非比例阻尼结构体系的新型快速随机分析方法,对其收敛条件进行研究,并提出了迭代矩阵的构造方法以加快收敛速度,最后从数学角度分析了其计算效率。区别于前人所做的工作,该文所提出的方法主要具备 2 个方面的优点:

a. 可以避免非比例阻尼结构体系复数特征值和特征向量的求解,因此其计算效率得以大大提高,特别适用于需要多次求解特征值的结构体系,如结构-阻尼器体系。

b. 可以避免矩阵求逆运算,从而避开了病态矩阵可能导致的一系列数值问题。同时,如文中所示,迭代运算并没有增加过多的计算量。因此,该文所提方法在非比例阻尼结构体系的随机分析中是准确的且具有较高的计算效率。

参考文献

[1] Foss K A. Coordinates Which Uncouple the Equation of Motion of Damped Linear Dynamic Systems[J]. Journal of Applied Mechanics, 1958, 25(1): 361-364.

[2] Lou M L, Duan Q, Chen G D. Modal Perturbation Method and Its Applications in Structural Systems[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2003, 169(8): 935-943.

[3] Karen K, Mohsen G A. New Approaches for Non-classically Damped System Eigenanalysis[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2005, 34(9): 1073-1087.

[4] Fernando C, María J E. Computational Methods for Complex Eigenproblems in Finite Element Analysis of Structural Systems with Viscoelastic Damping Treatments[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(44-47): 6448-6462.

[5] He J J, Jiang J S, Xu B. Modal Reanalysis Methods for Structural Large Topological Modifications with Added Degrees of Freedom and Non-classical Damping[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2007, 44(1-2): 75-85.

[6] Bilbao A, Avilés R, Agirrebeitia J, et al. Proportional Damping Approximation for Structures with Added Viscoelastic Dampers[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2006, 42(6): 492-502.

[7] Kim C W, Bennighof J K. Fast Frequency Response Analysis of Large-scale Structures with Non-proportional Damping[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007, 69(5): 978-992.

[8] Lin J L, Tsai K C. Simplified Seismic Analysis of Nne-way Asymmetric Elastic Systems with Supplemental Damping[J]. Earthquake Engineering and Structure Dynamics, 2007, 36(6): 783-800.

(下转第 44 页)

transformation, LFT)方法来考虑。为便于 H_∞控制器的设计, 使用基于线性矩阵不等式(linear matrix inequalities, LMI)的高效算法来求解。对一个安装 AMD 的 2 层结构模型设计了 H_∞控制器, 控制器使用结构每层的加速度作为反馈信号。对结构进行了振动台试验, 试验中所作用的地震激励为 1940 年 El Centro 地震波。结果表明, 所提出的控制器能有效降低结构的反应。在结构中引入质量和刚度不确定以验证所提出的控制器的鲁棒性。刚度不确定性是通过在结构的底层对角安装形状记忆合金丝(shape memory alloy, SMA)来引入的, 当对 SMA 丝用电流加热时, 结构的刚度会随之改变。质量不确定性是通过在结构各层外加质量来实现的。H_∞控制器的试验结果与极点配制法的结构进行了比较, 结果表明 H_∞控制器在结构的质量和刚度发生改变时仍能保持较高的减振水平, 而极点配制法则随着结构参数的改变控制效果变差。试验结果验证了 H_∞控制器在结构振动控制中的有效性, 更重要的是, H_∞控制器对于结构参数变化具有较强的鲁棒性。

参考文献

[1] 李宏男, 霍林生. 结构多维减震控制[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[2] Kobori T, Koshiak N, Yamada K, et al. Seismic Response Controlled Structure with Active Mass Driver System-part 1[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1991, 20(2): 133-149.

[3] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, et al. State-space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1989, 34 (8): 831-847.

[4] Skelton R E, Iwasaki T, Grigoriadis K M. A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design[M]. London: Taylor & Francis, 1998.

[5] Iwasaki T, Skelton RE. All Controllers for the General H_∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas[J]. Automatica, 1994, 30(8): 1307-1317.

[6] Gahinet P, Apkarian P. A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 4(4): 421-448.

(上接第 34 页)

[9] Li H, Du Y F. Study on Torsion Coupled Response of Non-proportionally Damped Eccentrically Isolated Structure Under Earthquake[C]// The 14th World Conference on Earthquake Engineering. Beijing: [s. n.], 2008: 140-146.

[10] Udwadia F E, Kumar R. Convergence of Iterative Methods for Non-classically Damped Dynamic Systems[J]. Applied Mathematics and Computation, 1994, 61(1): 61-97.

[11] Feriani A, Perotti F, Simoncini V. Iterative System Solvers for the Frequency Analysis of Linear Mechanical Systems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 190(13-14): 1719-1739.

[12] Kim C W. A Preconditioned Iterative Method for Modal Frequency-response Analysis of Structures with Non-proportional Damping[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 297(3-5): 1097-1103.

[13] Zavoni E H, Pérez A P, Cicilia F B. A Method for the Transfer Function Matrix of Combined Primary-secondary Systems Using Classical Modal Decomposition[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2006, 35(2): 251-266.

[14] Lin J H. A Fast CQC Algorithm of PSD Matrices for Random Seismic Responses[J]. Computers and Structures, 1992, 44(3): 683-687.

[15] Lin J H, Zhang Y H. Vibration and Shock Handbook, Chapter 30: Seismic Random Vibration of Long-span Structures[M]. Boca Raton: CRC Press, 2005.