

# 单点和多点荷载输入的虚拟激励法实用求解模式

国 巍<sup>1,2</sup>, 余志武<sup>1,2</sup>, 柳国环<sup>3</sup>, 邬 亮<sup>1,2</sup>

(1. 中南大学 土木工程学院, 湖南长沙 410075; 2. 高速铁路建造技术国家工程实验室, 湖南长沙 410075;

3. 天津大学 建筑工程学院, 天津 300072)

**摘要:** 在实际工程中采用虚拟激励法(pseudo excitation method, PEM) 往往需要编写复杂计算程序, 为方便工程应用, 建立了一种对应单点和多点荷载输入的虚拟激励法实用求解模式。考虑地震作用、风荷载等多种随机荷载, 提取单点和多点荷载输入下计算结构虚拟响应的实用求解模式, 并利用常规有限元分析软件的谐振稳态分析完成 PEM 核心计算, 最后通过线性组合重新构建结构虚拟响应和功率谱密度函数的求解公式, 从而在常规有限元分析软件中实现了 PEM 算法。由于采用建议方法可将 PEM 算法的核心计算交由有限元分析软件完成, 在保持 PEM 高效准确计算优势的前提下显著提高了工作效率, 避免了编写复杂计算程序, 方便实际工程应用。通过两个典型数值算例验证了建议方法的正确性与有效性, 并且指出其对于多种荷载工况的计算效率具有一定优势。

**关键词:** 单点和多点荷载输入; 虚拟激励法; 实用求解模式; 稳态分析; 功率谱

**中图分类号:** P315.9      **文献标志码:** A

## Practical solution mode of pseudo-excitation method corresponding to single and multiple point load input

GUO Wei<sup>1,2</sup>, YU Zhiwu<sup>1,2</sup>, LIU Guohuan<sup>3</sup>, WU Liang<sup>1,2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Central South University, Changsha 410075, China;

2. National Engineering Laboratory for High Speed Railway Construction, Changsha 410075, China;

3. School of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** Application of pseudo-excitation method (PEM) in practical engineering usually needs to complete complex calculation program. The practical solution mode for calculating structural pseudo response under single and multiple point load input was established. Considering several types of random loads such as earthquake, wind and so on, and extracting practical solution mode, the core calculation of PEM algorithm can be easily performed by harmonic steady analysis in general finite element analysis software. And then the pseudo response and power spectrum density function of structure are given by simple linear combination rule. As the core calculation of PEM algorithm is solved by software, the method proposed in this paper possesses both of computational efficiency and precision of the pseudo-excitation method. And stochastic analysis of practical engineering by PEM algorithm is greatly facilitated and programming is avoided. Finally, two numerical examples are given to verify the simplicity and validity of proposed method in this paper, and calculation efficiency of the method corresponding to multiple cases is also pointed out.

**Keywords:** single and multiple point load input; pseudo-excitation method; practical solution mode; steady-state analysis; power spectrum

基金项目: 国家自然科学基金项目(50938008, 51108466), 中国博士后科学基金项目(20110491277, 2012T50707), 中南大学博士后基金, 长江学者和创新团队发展计划项目(IRT1296)。

作者简介: 国巍(1982—), 男, 山东淄博人, 工学博士, 讲师。E-mail: wei.guo.86@gmail.com

收稿日期: 2012年9月

## 0 引言

建筑物在地震作用、强风以及车辆等复杂环境下会产生随机振动,具有显著的不确定性,采用具有概率特征的随机理论描述其振动规律更为合理。然而,传统随机理论较为复杂,计算量较大,影响其在实际工程中的应用<sup>[1-2]</sup>。林家浩等<sup>[3]</sup>于20世纪90年代提出并发展了一种新型计算方法——虚拟激励法,该方法有效解决了传统方法(如CQC、SRSS等)计算效率较低的问题,同时由于并未引入任何近似假定,属于精确解法。在虚拟激励法基础上,学者们针对多点地震作用<sup>[4]</sup>、强风<sup>[5]</sup>以及其它随机作用工况实现了一系列计算改进和工程应用,并研究了虚拟激励法与精细积分相结合<sup>[6]</sup>、非平稳激励<sup>[7]</sup>以及非比例阻尼结构的计算策略<sup>[8]</sup>等。虚拟激励法发展至今,其理论体系已经较为完善,具备显著的计算优势,大部分情况下可以取代传统随机方法。

目前,虚拟激励法已在许多大型工程中得以应用,如南京长江二桥、上海东海大桥、香港青马悬索桥以及深圳地王大厦等,均取得了良好的经济效益。然而,由于虚拟激励法往往需要自编程序,前后处理繁琐,将耗费大量精力,在高效计算表象下其工作效率并不高,这一点客观上阻碍了虚拟激励法的推广应用。如能利用现有商业有限元分析软件实现虚拟激励法计算,可以将软件强大前后处理和高效算法相融合,具有重要工程应用价值,虚拟激励法也必将得以进一步推广。汪洋等<sup>[9]</sup>基于通用有限元分析软件ANSYS的二次开发功能实现了虚拟激励法计算,然而此方法难以在其他二次开发功能较弱的有限元分析软件(如SAP 2000等)中实现。李永华等<sup>[10]</sup>基于大质量法改变结构模型建立了多点地震输入下虚拟激励法的ANSYS实现策略。此外,陈建兵等<sup>[11]</sup>指出了可用单一谐和函数下结构响应幅值来取代功率谱计算,简化了虚拟激励法计算。

为了从广泛意义上解决虚拟激励法的实际工程应用,本文综合考虑地震作用、风荷载以及其他随机作用情况,建立计算结构虚拟响应的实用求解模式,提出简单实用的线性组合方法,以使在任何具备谐振稳态分析功能的常规有限元分析软件中实现虚拟激励法核心计算。

## 1 谐振稳态分析

通用或专业有限元分析软件(如ANSYS、SAP 2000等)均具备谐振稳态分析功能,可用于计算某一阶或多阶频率简谐荷载下的结构动力响应。简

谐荷载是一种空间分布并与频率相关的任意函数,数学上是空间向量与频率函数的有限组合,可表示为:

$$\vec{\tau}(t) = \vec{P}e^{i\omega t} \quad (1a)$$

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^{n_p} s_j f_j(\omega) \vec{P}_j e^{i\theta_j} = \sum_{j=1}^{n_p} s_j f_j(\omega) \vec{P}_j (\cos\theta_j + i\sin\theta_j) \quad (1b)$$

其中: $\vec{\tau}(t)$ 为简谐荷载列向量; $\vec{P}$ 为表征 $\vec{\tau}(t)$ 的作用位置、幅值和相位,且可与频率相关的向量; $i = \sqrt{-1}$ ;  $n_p$ 为荷载模式数量; $s_j$ 、 $f_j(\omega)$ 分别为幅值比例系数和频率函数; $\vec{P}_j$ 为空间荷载列向量,表征荷载空间分布模式; $\theta_j$ 为所施加空间荷载 $\vec{P}_j$ 的相位角。

此外,由式(1b)可知, $f_j(\omega)$ 表征荷载频率特征,而 $\vec{P}_j$ 、 $s_j$ 表征与频率无关的荷载空间分布及幅值特征, $\theta_j$ 表征与频率无关的荷载相位特征。事实上,在通用或专业有限元分析软件中需要通过指定 $f_j(\omega)$ 、 $\vec{P}_j$ 、 $s_j$ 和 $\theta_j$ 等给出结构中所输入的确定性简谐荷载。特别的,在某些专业有限元分析软件中(如SAP 2000等),此类简谐荷载还往往存在多种输入方式,如力、位移和加速度等,方便实际工程应用。考虑到常规有限元分析软件均具备谐振稳态分析功能,期望能将其与形式上类似的虚拟激励法相联系,从而实现虚拟激励法的核心计算。这不仅可提高计算效率和计算精度,而且还可推动虚拟激励法在实际工程中的应用。

## 2 虚拟激励法实用表达式

### 2.1 地震动单点激励

作用于建筑结构的地震作用主要分两类:单点激励和多点激励。对于地震动单点激励,首先假定地面加速度为 $\ddot{u}_g$ ,地面加速度功率谱密度函数为 $S_{\ddot{u}_g}(\omega)$ ,根据虚拟激励法可构造简谐加速度 $\tilde{\ddot{u}}_g = \sqrt{S_{\ddot{u}_g}(\omega)} e^{i\omega t}$ ,此时虚拟地震激励下结构动力平衡方程可表示为:

$$M\tilde{\ddot{U}} + C\tilde{\dot{U}} + K\tilde{U} = -ME\tilde{\ddot{u}}_g \quad (2)$$

其中: $M$ 、 $C$ 和 $K$ 分别为结构质量、阻尼和刚度矩阵;

$\tilde{U} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n]^T$ 为结构虚拟位移响应向量;

$\tilde{\dot{U}}$ 分别为结构虚拟速度和加速度响应向量; $E$ 为荷载作用位置的单位列向量。基于矩阵运算法则,虚拟位移响应向量 $\tilde{U}$ 可表示为:

$$\tilde{U} = \tilde{U}_\omega e^{i\omega t} = -HME\sqrt{S_{\ddot{u}_g}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (3a)$$

$$H = (-M\omega^2 + i\omega C + K)^{-1} \quad (3b)$$

式(3)表征了结构在虚拟简谐荷载作用下的稳

态响应。如果采用力输入方式,参考式(1),则有  $\tilde{r}(t) = \bar{P}e^{i\omega t}$ ,  $\bar{P} = -ME\sqrt{S_{u_g}(\omega)}$ 。根据式(1),可得到力输入的各特征参数:  $s_j = 1$ ,  $P_j = -ME$ ,  $f_j(\omega) = \sqrt{S_{u_g}(\omega)}$ ,  $\theta_j = 0^\circ$ ,  $i_j = 1$ 。由  $P_j$  可以得到需要在结构各个质量点上需施加的简谐力大小,但在各点均施加力显然会导致复杂的操作。若能够直接采用加速度输入方式,式(3a)中  $-HME$  将由有限元分析软件自行计算,  $\tilde{r}(t) = \bar{P}e^{i\omega t}$  和  $\bar{P} = \sqrt{S_{u_g}(\omega)}$  仅需要对结构基底施加此简谐变化的加速度即可。但需要注意的是,频率  $\omega$  的变化范围与积分间隔  $d\omega$  取决于随机振动分析所涉及的频率范围和分辨率。利用有限元分析软件的谐振稳态分析功能,求解式(3a)可得到虚拟位移响应向量  $\tilde{U}_\omega$  和  $\tilde{U}$ ,进而得到虚拟结构响应  $z = A^T \tilde{U}$ ,其中向量  $A$  反映了结构几何参数和刚度特征,结构响应  $z$  的功率谱密度函数则为  $S_z = z^* z$ ,其中  $z^*$  为  $z$  的共轭。综上所述,利用有限元分析软件的稳态分析功能,实现地震动单点激励时的虚拟激励法计算简单可行。

## 2.2 地震动多点激励

假设结构共有  $m_0$  个支座,但仅有  $m$  个支座处输入地震动各不相同,即结构承受  $m$  个点的地震激励。结构全部  $m_0$  个支座的地面加速度可定义为  $\ddot{U}_{g_0} = [\ddot{u}_{g_1} \ \ddot{u}_{g_2} \ \cdots \ \ddot{u}_{g_{m_0}}]^T$ ,地面加速度功率谱密度矩阵为  $S_{\ddot{U}_{g_0}}(\omega)$ 。从  $m$  个支座输入的不同的地面加速度定义为  $\ddot{U}_g = [\ddot{u}_{g_1} \ \ddot{u}_{g_2} \ \cdots \ \ddot{u}_{g_m}]^T$ ,地面加速度功率谱密度矩阵为  $S_{\ddot{U}_g}(\omega)$ ,则有  $S_{\ddot{U}_{g_0}}(\omega) = \Omega S_{\ddot{U}_g}(\omega) \Omega^T$ ,其中  $\Omega \in R_{m_0 \times m}$ ,是  $m_0 \times m$  维转换矩阵。对应的位移响应功率谱密度矩阵为  $S_{U_g}(\omega) = S_{\ddot{U}_g}(\omega) / \omega^4$ 。 $m$  个支座所对应的不同地震激励位移响应功率谱密度矩阵  $S_{U_g}(\omega)$  为厄密特矩阵,故可分解为:

$$S_{U_g}(\omega) = \sum_{j=1}^m [\bar{X}_j(\omega)]^* [\bar{X}_j(\omega)]^T = \sum_{j=1}^m \lambda_j(\omega) [\phi_j(\omega)]^* [\phi_j(\omega)]^T \quad (4)$$

其中:上标  $*$  表示共轭;  $\lambda_j(\omega)$  为实数;  $\phi_j(\omega)$  为复向量且为复数空间的规范正交基,且  $\lambda_j(\omega)$  和  $\phi_j(\omega)$  均是频率  $\omega$  的函数。

矩阵  $S_{U_g}(\omega)$  可以采用多种分解方法,如矩阵复特征值和特征向量、复三角分解等,可视具体情况和要求而定。通过式(4)可以构造  $m$  个虚拟位移为<sup>[4]</sup>:

$$\tilde{U}_{g_j} = \sqrt{\lambda_j(\omega)} \phi_j(\omega) e^{i\omega t} \quad (j = 1, \cdots, m) \quad (5)$$

其中,  $\tilde{U}_{g_j}$  表征第  $j$  个虚拟激励。对于地震动多点激励下结构响应,本文采用位移输入方式<sup>[12]</sup>求解。在结构各支座处虚拟位移激励下,结构动力平衡方程

与虚拟响应可表示为:

$$M \tilde{U}_j + C \dot{\tilde{U}}_j + K \tilde{U}_j = -K_{sb} \Omega \tilde{U}_{g_j} \quad (6a)$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_\omega e^{i\omega t} = \sum_{j=1}^m \tilde{U}_j = \sum_{j=1}^m \tilde{U}_{j\omega} e^{i\omega t} \quad (6b)$$

其中,  $K_{sb}$  为结构与基础的交叉刚度矩阵。需要注意的是,位移输入方式可能导致误差的情况应加以注意和处理<sup>[13]</sup>。综合式(5)和式(6b)可得:

$$\tilde{U}_j = \tilde{U}_{j\omega} e^{i\omega t} = -HK_{sb} \Omega \sqrt{\lambda_j(\omega)} \phi_j(\omega) e^{i\omega t} \quad (7)$$

若采用位移输入方式,与式(1)相比较,有  $P = \Omega \sqrt{\lambda_j(\omega)} \phi_j(\omega)$ 。考虑到  $\phi_j(\omega)$  是圆频率  $\omega$  相关的复向量,使得  $P$  中存在与频率  $\omega$  相关的相位角,进而导致与式(1)所代表的谐振稳态分析的表达形式并不完全一致(其相位信息与频率  $\omega$  无关),无法直接利用有限元分析软件来求解式(7)。为解决由频率相关和相位变化所导致的问题,以下将构造虚拟响应的实用求解模式,通过实用求解模式的简单线性组合实现式(7)计算,同时实用求解模式的提出和构建将规范虚拟激励法求解过程。本文在分析频率范围  $\omega \in [\omega_1 \ \omega_N]$  内足够精细地选取  $N$  个离散频率点  $\omega_1, \cdots, \omega_N$ ,通过求解所选取频率点上的功率谱值以确定整体功率谱函数。

### 1) 实用求解模式

提出并构建实用求解模式,旨在使式(7)中不出现与频率相关的相位项,与式(1)相一致,以便于利用有限元分析软件间接求解式(7)。为构建实用求解模式,首先需要给出  $m$  维实数空间的规范正交基(理论上任一正交基均可以采用)。假设规范正交基表达为  $\Phi = [\varphi_1 \ \cdots \ \varphi_m]$ ,则所构建的实用求解模式定义为:

$$\tilde{W}_k = \tilde{W}_{k\omega} e^{i\omega t} = -HK_{sb} \Omega \varphi_k e^{i\omega t} \quad (k = 1, \cdots, m) \quad (8)$$

其中,下标  $k$  用来表征规范正交集  $\Phi$  的第  $k$  个向量基。采用位移输入方式,对比式(1),则有:

$$\bar{P}_k = s_k f_k(\omega) P_k e^{i\theta_k} = \Omega \varphi_k \quad (9)$$

式中,  $s_k = 1$ ,  $f_k(\omega) = 1$ ,  $P_k = \Omega \varphi_k$ ,  $\theta_k = 0^\circ$ 。

从式(8)和式(9)可以看到,所构建的实用求解

模式  $\tilde{W}_k$  可以由有限元分析软件谐振稳态分析求解。需要注意的是,由于  $\Phi = [\varphi_1 \ \cdots \ \varphi_m]$  为规范正交基所组成的矩阵,实用求解模式数量等于激励不同的结构支座数量  $m$ ,各实用求解模式互不相关。

### 2) 组合求解结构虚拟响应

上述实用求解模式中,没有考虑频率及与频率相关的相位信息,为此重新引入频率、相位信息。在频率范围  $\omega \in [\omega_1 \ \omega_N]$  内选定频率  $\omega = \omega_a$ ,  $\phi_j(\omega_a)$  为复数向量,可以进一步表示为:

$$\phi_j(\omega_a) = \phi_j^{\text{real}}(\omega_a) + i\phi_j^{\text{imag}}(\omega_a) \quad (10)$$

其中,  $\phi_j^{\text{real}}(\omega_a)$  与  $\phi_j^{\text{imag}}(\omega_a)$  分别为向量  $\phi_j(\omega_a)$  的实部和虚部。考虑到  $\Phi = [\varphi_1, \dots, \varphi_m]$  为  $m$  维实数域的一组规范正交基所构成的矩阵, 则其组合形式为:

$$\phi_j^{\text{real}}(\omega_a) = \sum_{k=1}^m b_{jk}^{\text{real}} \varphi_k = \Phi B_j^{\text{real}} \quad (11a)$$

$$\phi_j^{\text{imag}}(\omega_a) = \sum_{k=1}^m b_{jk}^{\text{imag}} \varphi_k = \Phi B_j^{\text{imag}} \quad (11b)$$

其中,  $b_{jk}^{\text{real}}$  和  $b_{jk}^{\text{imag}}$  ( $k = 1, \dots, m$ ) 为实部和虚部的组合系数, 而  $B_j^{\text{real}} = [b_{j,1}^{\text{real}}, \dots, b_{j,m}^{\text{real}}]^T$  和  $B_j^{\text{imag}} = [b_{j,1}^{\text{imag}}, \dots, b_{j,m}^{\text{imag}}]^T$  则为组合系数向量。由于  $\Phi$  为规范正交基, 则  $\Phi^{-1} = \Phi^T$ , 故有:

$$B_j^{\text{real}} = \Phi^T \phi_j^{\text{real}}(\omega_a), \quad b_{jk}^{\text{real}} = \varphi_k^T \phi_j^{\text{real}}(\omega_a) \quad (11c)$$

$$B_j^{\text{imag}} = \Phi^T \phi_j^{\text{imag}}(\omega_a), \quad b_{jk}^{\text{imag}} = \varphi_k^T \phi_j^{\text{imag}}(\omega_a) \quad (11d)$$

联合式(7)和式(11), 可得在任意频率  $\omega_a$  处结构虚拟位移响应的表达式为:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{j\omega_a} &= -HK_{\text{sb}}\Omega \sqrt{\lambda_j(\omega_a)} \phi_j(\omega_a) = \\ &= -HK_{\text{sb}}\Omega \sqrt{\lambda_j(\omega_a)} \left[ \sum_{k=1}^m b_{jk}^{\text{real}} \varphi_k + i \sum_{k=1}^m b_{jk}^{\text{imag}} \varphi_k \right] = \\ &= \sum_{k=1}^m -HK_{\text{sb}}\Omega \varphi_k \sqrt{\lambda_j(\omega_a)} \varphi_k^T (\phi_j^{\text{real}} + i\phi_j^{\text{imag}}) = \\ &= \sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda_j(\omega_a)} \varphi_k^T \phi_j \tilde{W}_{k\omega_a} \quad (12) \end{aligned}$$

结合式(8)可以看出, 式(12)可通过实用求解模式的线性组合间接得到频率  $\omega_a$  处的虚拟响应, 进而可得到结构虚拟响应  $\tilde{U}_{\omega_a}$ , 其表达式为:

$$\tilde{U}_{\omega_a} = \sum_{j=1}^m \tilde{U}_{j\omega_a} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda_j(\omega_a)} \varphi_k^T \phi_j \tilde{W}_{k\omega_a} \quad (\omega_a \in [\omega_1, \omega_N]) \quad (13)$$

通过推导看出, 在所构建实用求解模式的基础上,

给出了通过线性组合得到结构虚拟响应  $\tilde{U}_{\omega_a}$  的表达式, 即式(13), 进而可以计算得到结构位移随机响应的功率谱密度函数矩阵  $S_U(\omega_a) = \tilde{U}_{\omega_a}^* \tilde{U}_{\omega_a}^T$ 。特别地, 为方便理论推导和规范化求解, 本文建议选用一组特殊规范正交基:  $\Phi = [\varphi_1, \dots, \varphi_m]$ ,  $\varphi_k = [0, \dots, \rho, 1, \rho, \dots, \rho]^T$  有  $m$  个元素, 且第  $k$  个元素为 1, 其他全部为 0,  $k = 1, \dots, m$ , 则  $\Phi^{-1} = \Phi^T$ 。式(13)可简化为:

$$\tilde{U}_{\omega_a} = \sum_{j=1}^m \tilde{U}_{j\omega_a} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda_j(\omega_a)} \phi_{jk} \tilde{W}_{k\omega_a} \quad (\omega_a \in [\omega_1, \omega_N]) \quad (14)$$

其中, 系数  $\phi_{jk} = \varphi_k^T \phi_j = b_{jk}^{\text{real}} + i b_{jk}^{\text{imag}}$  代表复向量  $\phi_j(\omega_a)$  第  $k$  个元素,  $\tilde{W}_{k\omega_a} = -HK_{\text{sb}}\Omega \varphi_k$  为标准化的实用求解模式的频率解, 进而求解结构随机响应功

率谱和响应谱参数, 可分为两步: 1) 构建并计算实用求解模式; 2) 求解虚拟响应、功率谱和计算谱参数。从物理角度来理解此问题: 由于规范正交矩阵  $\Phi$  为单位对角矩阵, 所得式(14)中  $\tilde{U}_{j\omega_a}$  实际上表示激励不同的支座在单位地震动输入下结构虚拟响应的线性组合, 而激励相同支座所引发的地震响应计算则可直接通过有限元分析软件实现。同时需要说明的是, 地震动单点激励同样可以建立实用求解模式, 其将与地震动多点激励相统一, 可规范求解过程。为说明此点, 区别于多点地震激励, 单点地震激励将采用加速度输入方式并参考式(3), 其实用求解模式和虚拟响应可表示为:

$$\tilde{W} = \tilde{W}_{\omega} e^{i\omega t} = -HME e^{i\omega t} \quad (15a)$$

$$\tilde{U} = \tilde{U}_{\omega} e^{i\omega t} = \tilde{W} \sqrt{S_{\tilde{U}_i}(\omega)} = \tilde{W}_{\omega} \sqrt{S_{\tilde{U}_i}(\omega)} e^{i\omega t} \quad (15b)$$

由此可见, 单点激励下结构响应计算可以利用式(15), 通过实用求解模式和虚拟响应两步操作实现。根据式(14)和式(15)计算的虚拟位移响应, 可直接给出结构第  $l$  个构件虚拟内力  $\eta_l$  表达为:  $\eta_l = A_l^T \tilde{U}_{\omega_a}$  (多点地震激励), 或  $\eta_l = A_l^T \tilde{U}_{\omega}$  (单点地震激励), 其中,  $A_l^T$  为  $1 \times n$  维向量, 表征了结构的几何物理特征。

### 2.3 风荷载及其他类型随机荷载

类似于地震动多点激励, 风荷载及其他类型随机荷载在结构物上同样存在多个不同激励源。定义不同的荷载激励向量表达式为  $F = [f_1, \dots, f_m]^T$ , 共有  $m$  个不同激励, 功率谱密度矩阵为  $S_F(\omega)$ 。实际所有激励可为  $m_0$  ( $m_0 \geq m$ ) 个, 类似前文, 转换矩阵同样定义为  $\Omega$ 。类似于式(4)和式(5), 根据功率谱密度矩阵构建  $m$  个虚拟荷载激励, 其表达式为:

$$\tilde{F}_j = \sqrt{\lambda_j(\omega)} \varphi_j(\omega) e^{i\omega t} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (16)$$

结构动力平衡方程和虚拟响应表达式写为:

$$M \tilde{U}_j + C \tilde{U}_j + K \tilde{U}_j = \Omega \tilde{F}_j \quad (17a)$$

$$\tilde{U}_j = \tilde{U}_{j\omega} e^{i\omega t} = H\Omega \sqrt{\lambda_j(\omega)} \varphi_j(\omega) e^{i\omega t} \quad (17b)$$

参数定义同前文。由于  $\phi_j(\omega)$  为复向量, 无法直接采用式(1)的谐振稳态计算, 借鉴地震多点激励处理方式, 选用一组特殊规范正交基  $\Phi = [\varphi_1, \dots, \varphi_m]^T$ ,  $\varphi_k = [0, \dots, \rho, 1, \rho, \dots, \rho]^T$  有  $m$  个元素, 且第  $k$  个元素为 1, 其他全部为 0,  $k = 1, \dots, m$ 。构造相应的实用求解模式为:

$$\tilde{W}_k = \tilde{W}_{k\omega} e^{i\omega t} = H\Omega \varphi_k e^{i\omega t} \quad (k = 1, \dots, m) \quad (18)$$

类似的, 式(18)所构建的实用求解模式可以利用有限元分析软件的谐振稳态分析功能来求解。需

要指出的是,此时谐振荷载为力输入方式,需要在结构的各个实际力作用点依次添加单位谐振力,这有别于地震作用中采用加速度和位移输入方式。推导过程类似于前文地震动多点激励,最终将得到由实用求解模式线性组合所得的结构虚拟响应表达式:

$$\tilde{U}_{\omega_a} = \sum_{j=1}^m \tilde{U}_{j\omega_a} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda_j(\omega_a)} \phi_{jk} \tilde{W}_{k\omega_a} \quad (\omega_a \in [\omega_1, \omega_N]) \quad (19)$$

其中,系数  $\phi_{jk} = \phi_k^T \phi_j = b_{jk}^{\text{real}} + i b_{jk}^{\text{imag}}$  代表复向量  $\phi_j(\omega_a)$  的第  $k$  个元素,进而得到结构随机响应的功率谱密度函数矩阵  $S_U(\omega_a) = \tilde{U}_{\omega_a}^* \tilde{U}_{\omega_a}^T$ ,  $\tilde{U}_{\omega_a}^*$  是  $\tilde{U}_{\omega_a}$  的共轭向量,由此可见,风荷载及其他类型随机荷载与地震动激励所推导的表达式基本一致。

综上所述,不管结构承受何种形式的外部随机激励,无论是以力、位移亦或加速度输入方式,本文所提方法主要是构建相对固定的实用求解模式  $\tilde{W}_{k\omega}$ ,以便规范化地实现虚拟激励法通用软件计算。具体分两步进行:第一步构建实用求解模式,实用求解模式是最根本的计算单元,可以利用有限元分析软件的谐振稳态分析功能实现;第二步则是通过简单线性组合得到结构虚拟响应,从而利用有限元分析软件实现虚拟激励法的核心计算。通过理论推导还可看到,本文方法在计算过程中保持了虚拟激励法的高效精确,没有额外增加计算量,同时利用有限元分析软件实现核心计算,有效提高了工作效率。此外,实用求解模式的提出还具有以下显著优势:荷载激励大小和相位发生变化时,只要荷载作用位置不变,之前计算的实用求解模式仍然可重复利用,即式(8)、(15a)、(18)仅与荷载作用位置有关,而与荷载大小和相位无关,有效减小了需要大量工况重复计算的工作量。图1给出了地震作用、风及其他多种随机荷载下虚拟激励法在有限元分析软件中实现的规范化步骤。

### 3 数值验证

通过实际工程算例来验证所提出的虚拟激励法软件实现策略的准确性和有效性,计算软件采用 SAP 2000,并采用传统随机分析方法计算结果作为对比。

#### 3.1 首都机场 AMECO 维修机库网架结构

首都机场四机位 AMECO 维修机库是大跨度网架结构,AMECO 机库长 306 m(153 m × 2)、宽 90 m、高 40 m,另设四个尾库,覆盖面积 35 993 m<sup>2</sup>,结构总质量约 5 500 t,是目前我国最大跨度的机库,也是世界上最大的机库之一,具体的网架结构参数参见文

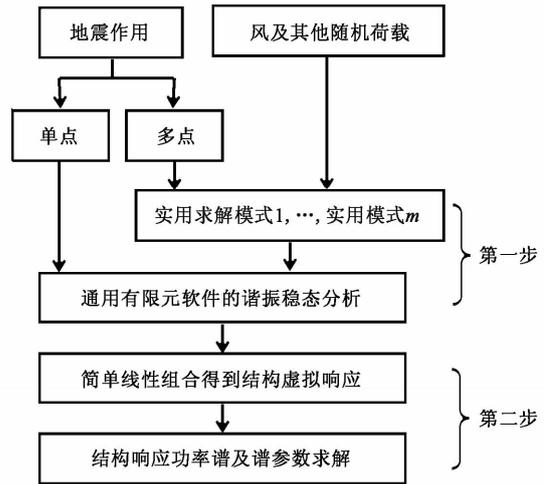
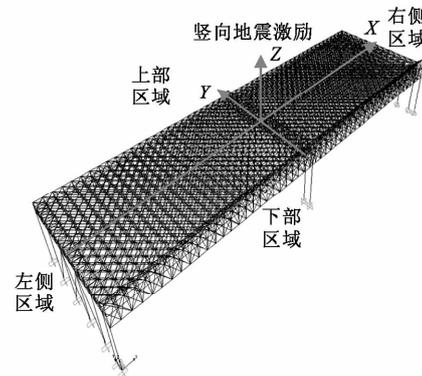
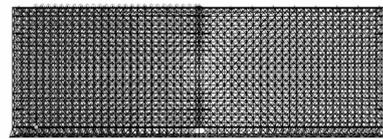


图1 通用有限元分析中虚拟激励法实现的一般步骤  
Fig. 1 Usual steps of implementation of pseudo-excitation method in general finite element software

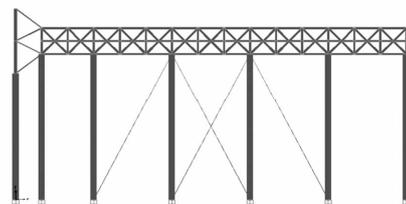
献[14]。图2为所建立的 AMECO 维修机库有限元分析模型。对大跨度网架结构,其竖向振动往往起控制作用,同时仅为验证算法,为此仅考虑在竖向地震激励下的结构动力响应。假定混凝土柱轴向与



(a) AMECO 维修机库整体结构有限元分析模型



(b) 模型平面



(c) 模型侧立面

图2 首都机场 AMECO 维修机库结构有限元分析模型  
Fig. 2 Finite element model of maintenance hangar of the Beijing International Airport AMECO

地面完全刚性连接,网架结构支点直接承受地震竖向作用。本文选用 Clough-Penzien 模型<sup>[15]</sup>,可描述为:  $S_{u_g} = S_0 \{ [\omega_g^4 + (2\xi_g \omega_g \omega)^2] / [(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_g \omega_g \omega)^2] \} \times \{ [\omega_f^4 / (\omega_f^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_f \omega_f \omega)^2] \}$ , 其中,  $\omega_g$  为场地土频率,  $\xi_g$  为场地土阻尼比,文献 [16] 给出了三类场地和第一地震分组的对应参数取值,  $\omega_g = 13.96 \text{ rad/s}$ ,  $\xi_g = 0.80$ ,  $\omega_f$  可取小于  $\omega_g$  的频率,代表过滤层频率,取  $\omega_f = 10.0 \text{ rad/s}$ ,  $\xi_f$  代表过滤层阻尼比,  $\xi_f = \xi_g = 0.80$ 。本文取强度因子  $S_0 = 0.0006 \text{ m}^2/\text{s}^3$ 。

为了验证本文方法的准确性,选取网架模型中部分杆件为研究对象,如表 1 所示。图 3a 给出了地震动单点激励下网架结构实用求解模式的轴力响应曲线,通过本文方法可以利用图中实用求解模式的响应计算结果叠加得到网架结构轴力随机响应。为了对比传统方法和本文方法的计算结果,图 3b 给出了维修机库大跨度网架结构多个杆件轴力的随机响应均方根值,从图中可以看到,本文方法的计算结果与传统随机方法基本吻合,表明本文方法不仅高效而且准确。

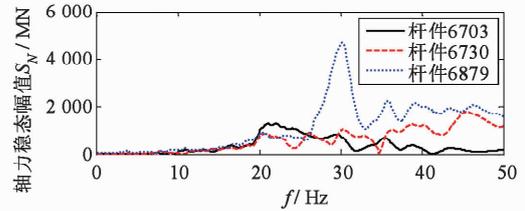
表 1 网架结构中所选取杆件信息

Table 1 Selected bars information of grid structure

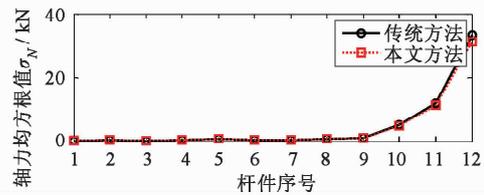
区域	杆件位置	杆件编号	序号
上部区域	上弦杆	6703	1
	下弦杆	6730	2
	腹杆	6879	3
左侧区域	上弦杆	6544	4
	下弦杆	6563	5
	腹杆	6623	6
右侧区域	上弦杆	23072	7
	下弦杆	23091	8
	腹杆	23173	9
下部区域	上弦杆	7215	10
	下弦杆	7243	11
	腹杆	7247	12

为进一步验证本文方法在多点地震激励下随机响应计算的可行性,地震动多点输入仅考虑行波效应,不考虑频散效应和局部场地效应。根据 GB 50011—2010《建筑抗震设计规范》规定,三类场地土层剪切波速为 140~250 m/s,首先取其波速为 200 m/s,以反映行波效应,地震传播方向分别采用 X 向和 Y 向,仍然输入竖向地震。采用本文方法进行多点随机分析 X 向对应 17 个实用求解模式, Y 向对应 7 个实用求解模式,分别建立稳态谐振分析工况求解各基本模式响应。图 4 给出了杆件 6703 在 X 和 Y 向的前 4 个实用求解模式的轴力稳态响应曲线,可利用本文所推导公式计算得到轴力虚拟响应、功率谱密度和响

应均方值,从图中还可看出,网架结构高频振动不可忽视。需要提及的是,单纯利用 SAP 2000 等常规有限元分析软件自带功能是无法实现多点随机分析的,尤其是无法考虑行波效应,故借助本文方法可以弥补常规有限元分析软件的不足,具有工程应用价值。

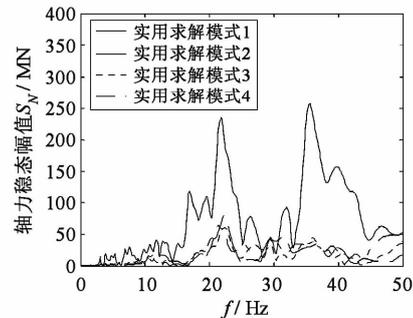


(a) 实用求解模式的轴力稳态幅值

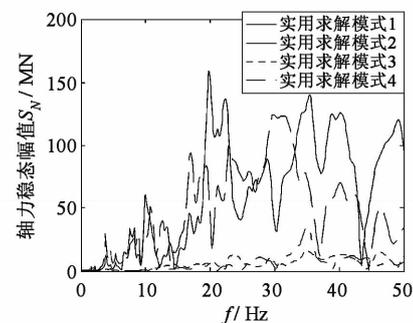


(b) 随机响应杆件轴力均方根

图 3 地震动单点激励下网架结构响应特征  
Fig. 3 Response characteristics of grid structure subjected to single point earthquake excitation



(a) X 向输入



(b) Y 向输入

图 4 地震多点输入下网架结构杆件 6703 的实用求解模式的轴力稳态幅值

Fig. 4 Steady-state amplitude of axial force of bar 6703 of grid structure corresponding to practical solution modes under multiple point earthquake excitations

图5给出了考虑地震X向和Y向行波效应下网架结构模型部分杆件轴力的随机响应变化,由图可见,行波效应对结构随机响应影响明显,相比图3b一致输入计算结果,图中数据量级从10 kN变化为100 kN,这主要是由于多点地震激励中各支座点不同的拟静力位移所导致,在大跨度网架结构随机分析中需要考虑行波效应影响。同时,图5还给出了二类( $\omega_g = 17.95\text{rad/s}$ ,  $\xi_g = 0.72$ )和三类等场地条件下结构随机响应计算结果,由于荷载作用位置和方向并无变化,这些实用求解模式的结果在多种工况中均是恒定的,无需利用SAP 2000软件进行重复计算,仅仅简单线性组合即可得到结果,有效提高了计算效率。从图5中计算结果还可看到,某些杆件轴力的随机响应受场地影响显著,如在地震X向传播时的网架结构下部区域的腹杆7247,其编号对应表1中序号12。

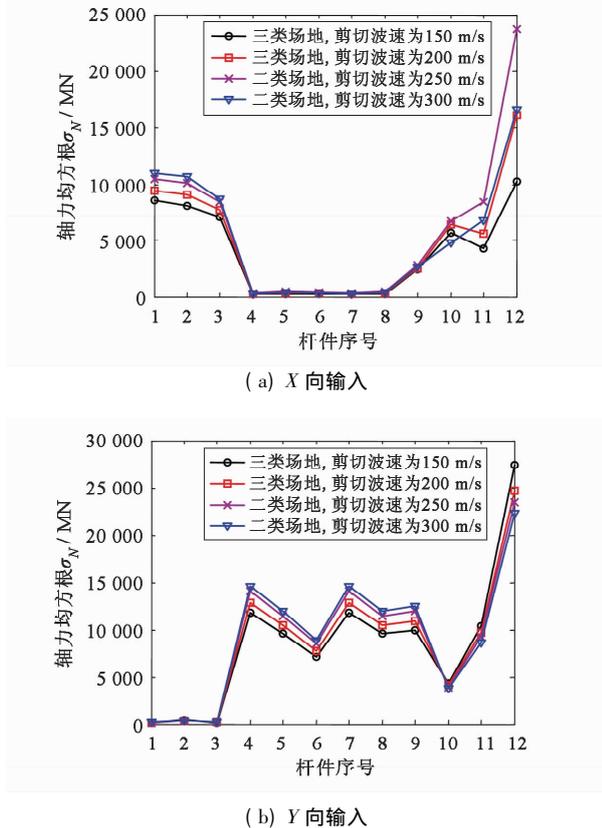


图5 考虑多点地震行波效应影响的网架结构部分杆件轴力均方根

Fig. 5 Root mean square of axial force of several bars of grid structure considering wave passage effect of multiple point earthquake excitations

### 3.2 天津西站屋盖网壳结构

天津西站采用大跨度屋盖网壳结构,作为“房桥合一”新型高铁客运站,为满足站厅层大空间的候车需求,上部屋盖结构跨度114 m,矢高35.9 m,总长

365.5 m,采用单层圆柱面网壳,网格形式为关联方格。网壳构件采用双向变截面箱梁,拱脚处梁高约3 000 mm,翼缘宽800 mm,拱顶处梁高约1 000 mm,翼缘宽2 000 mm。图6为天津西站整体和大跨度屋盖网壳结构的有限元分析模型。对天津西站大跨度网壳结构考虑X向地震激励,采用本文所提方法和传统随机方法进行对比计算。此处考虑到“房桥合一”结构典型的上柔下刚结构特征,同时也为简化起见,假定大跨度屋盖下部支撑结构完全刚性。采用Clough-Penzien随机模型<sup>[15]</sup>,考虑单点和多点随机激励特征,地震波传播方向和振动方向均为X向,其剪切波速为200 m/s。选取屋盖结构部分节点如表2所示。图7给出了单点地震激励下部分杆件的实用求解模式和随机响应,由图可见,传统方法和本文所提方法的结果完全一致,再次验证了本文方法的准确性。基于SAP 2000软件的稳态谐振分析,对天津西站大跨度屋盖结构的X向进行多点地震激励。该大跨屋盖结构杆件以承受弯矩为主,故选取杆件截面弯矩为评估指标。图8给出了屋盖结构杆件898和805的两种实用求解模式稳态计算结果曲线。图9给出了两种场地条件下大跨度屋盖结构部分杆件的弯矩随机响应,可以看到,行波效应和场地类别对大跨度屋盖结构具有一定程度的影响。与首都飞机场维修机库相同,在不同场地条件下的随机响应计算中,仅需利用计算得到的两种实用求解模式响应结果即可,多种工况无需重复计算,本文方法可有效提高计算效率。

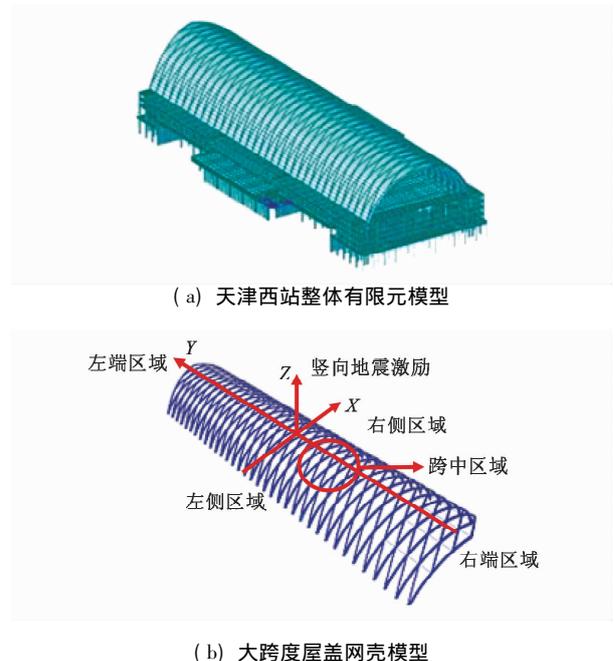
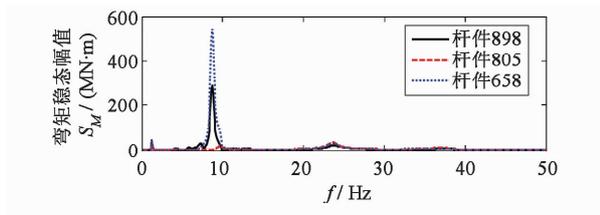


图6 天津西站“房桥合一”混合结构体系模型  
Fig. 6 Integrated building-bridge hybrid structural model of the Tianjin West Station

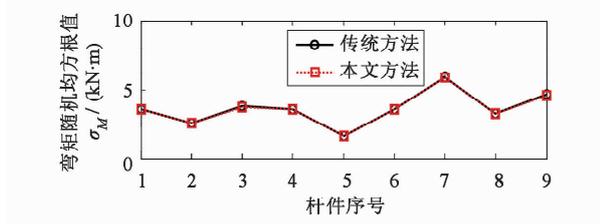
表2 大跨屋盖结构中所选取杆件信息

Table 2 Selected bar information of long span roof structure

区域	沿 Y 向	杆件编号	序号
跨中区域	左端	895	1
	跨中	583	2
	右端	889	3
左侧区域	左端	692	4
	跨中	788	5
	右端	887	6
右侧区域	左端	662	7
	跨中	587	8
	右端	476	9



(a) 实用求解模式的弯矩稳态幅值



(b) 随机响应杆件弯矩均方根

图7 地震动单点激励下屋盖结构响应特征

Fig.7 Response characteristics of roof structure under single earthquake excitation

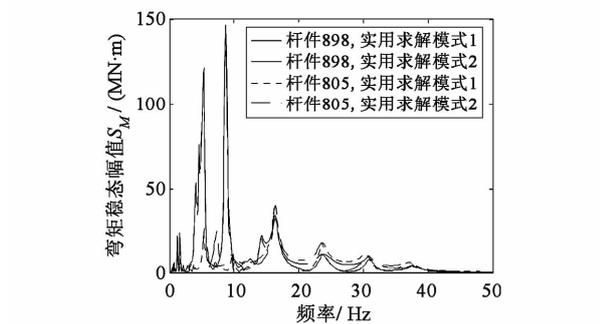


图8 地震动多点激励下屋实用求解模式的弯矩稳态幅值

Fig.8 Steady-state amplitude of bending moment corresponding to practical solution modes of roof under multiple point earthquake excitation

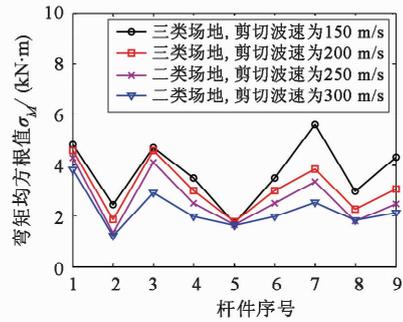


图9 考虑多点地震行波效应的屋架结构杆件弯矩均方根

Fig.9 Root mean square of bending moment of roof considering wave passage effect of multiple point earthquake excitations

## 4 结论

1) 本文所建立的实用求解模式相对固定且简单规范,借助通用有限元分析软件的谐振稳态分析功能实现求解,通过线性组合得到结构虚拟响应和功率谱,任何具备谐振稳态分析功能的有限元分析软件均可作为虚拟激励法的实现工具。此外,这将使得单点和多点荷载作用的求解过程更规范,方便工程应用,提高了工作效率。

2) 对于多种荷载工况下,如果实用求解模式的作用方向和位置不变,其计算结果可以在多种工况中重复利用,具有显著计算效率优势。

## 参考文献

- [1] Kiureghian A D, Neuenhofer A. Response spectrum method for multi-support seismic excitations [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1992, 21(8): 713-740.
- [2] Emesto H Z, Vonmarcke E H. Seismic random-vibration analysis of multi-support structural system [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994, 120(5): 1107-1128.
- [3] Lin J H. A fast CQC algorithm of PSD matrices for random seismic responses [J]. Computers and Structures, 1992, 44(3): 683-687.
- [4] Lin J H, Zhang Y H, Li Q S, et al. Seismic spatial effects for long-span bridges using the pseudo excitation method [J]. Engineering Structures, 2004, 26(9): 1207-1216.

- [5] 卜国雄,谭平,张颖,周福霖. 大型超高层建筑的随机风响应分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2010, 42(2): 175-179. ( Bu Guoxiong, Tan Ping, Zhang Ying, Zhou Fulin. Random wind-induced response analysis of a large-scale and high-rise building [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2010, 42(2): 175-179. ( in Chinese) )
- [6] 张志超,张亚辉,赵岩. 车-桥系统非平稳随机振动的 PEM-PIM 算法[J]. 计算力学学报, 2009, 26(1): 26-32. ( Zhang Zhichao, Zhang Yahui, Zhao Yan. Combined PEM-PIM scheme for the non-stationary vibration analysis of vehicle-bridge systems [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2009, 26(1): 26-32. ( in Chinese) )
- [7] 张志超,张亚辉,林家浩. 三维车桥耦合系统的非平稳随机振动分析[J]. 应用力学学报, 2010, 27(1): 151-158. ( Zhang Zhichao, Zhang Yahui, Lin Jiahao. Seepage calculation model for face slab joint and crack of concrete face rockfill dam [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2010, 27(1): 151-158. ( in Chinese) )
- [8] Zhang W S, Xu Y L. Modal analysis and seismic response of steel frames with connection dampers [J]. Engineering Structures, 2001, 3(4): 385-396.
- [9] 汪洋,石永久,王元清. 实用多点输入虚拟激励法在通用有限元软件中的实现[J]. 地震工程与工程振动, 2010, 30(1): 46-52. ( Wang Yang, Shi Yong Jiu, Wang Yuanqing. Implementation of the practical pseudo excitation method for multi-support seismic response analysis in general FEM software [J]. Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2010, 30(1): 46-52. ( in Chinese) )
- [10] 李永华,李思明. 绝对位移直接求解的虚拟激励法[J]. 振动与冲击, 2009, 28(10): 185-190. ( Li Yonghua, Li Siming. Pseudo excitation based on solving absolute displacement [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(10): 185-190. ( in Chinese) )
- [11] 陈建兵,彭勇波,李杰. 关于虚拟激励法的一个注记[J]. 计算力学学报, 2011, 28(2): 163-167. ( Chen Jianbing, Peng Yongbo, Li Jie. A note on the pseudo-excitation method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(2): 163-167. ( in Chinese) )
- [12] Edward L W. Static and dynamic analysis of structures [M]. Berkeley, CA: Computer and Structures, Inc, 2004.
- [13] Liu G H, Guo W, Li H N. An effective and practical method for solving an unnegligible problem inherent in the current calculation model for multi-support seismic analysis of structures [J]. Science China: Technological Sciences, 2010, 53(7): 1774-1784.
- [14] 刘树屯,关忆卢. 首都机场 306 m 跨飞机库屋盖钢结构设计施工中的一些问题[J]. 钢结构, 1996, 11(4): 4-8. ( Liu Shutun, Guan Yilu. Several problems of design and construction of 306 m-span hangar roof in capital airport [J]. Steel Construction, 1996, 11(4): 4-8. ( in Chinese) )
- [15] Clough R W, Penzien J. Dynamics of structures [M]. 3rd ed. Berkeley, CA: Computers & Structures, Incorporated, 2004.
- [16] 欧进萍,牛荻涛,杜修力. 设计用随机地震动的模型及其参数确定[J]. 地震工程与工程震动, 1991, 11(3): 45-53. ( Ou Jinping, Niu Ditao, Du Xiuli. Random earthquake ground motion model and its parameter determination used in aseismic design [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1991, 11(3): 45-53. ( in Chinese) )